

مکانیک سیالات ۲



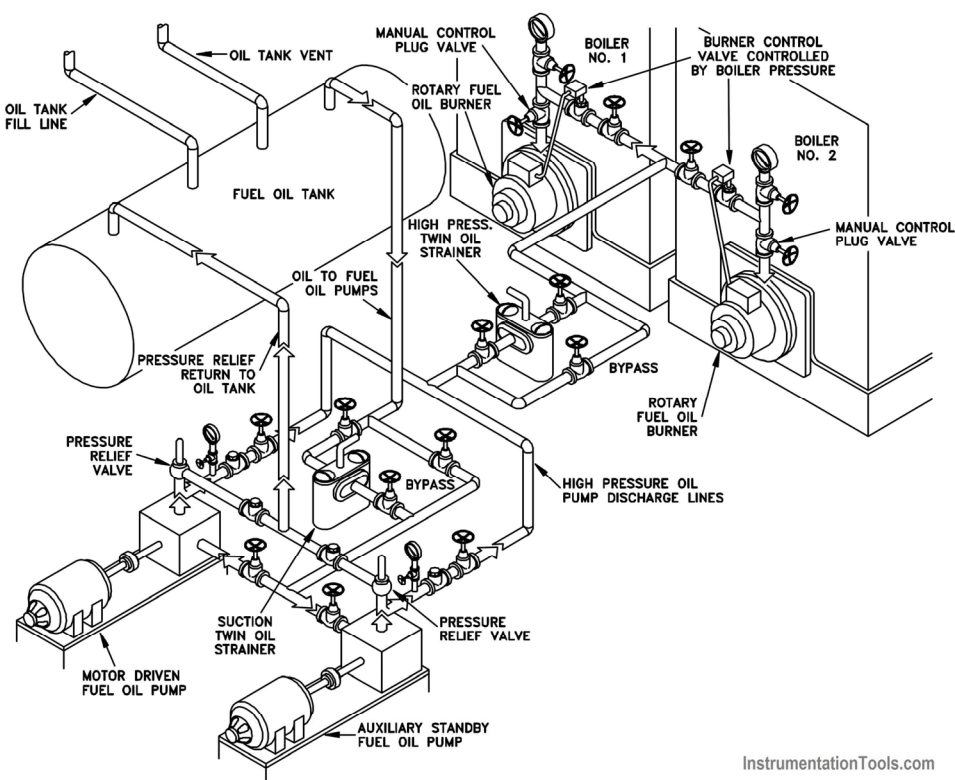
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش اول از مباحث فصل ششم
جریان داخلی: مبانی جریان در لوله های مستقیم

کلاس درس دکتر نوروزی
خرداد ۹۹

جریانهای داخلی

جریانهای داخلی یکی از مهمترین جنبه های کاربردی و مهندسی علم مکانیک سیالات است. عمده این کاربردها متوجه طراحی سیستم های لوله کشی و کانال کشی در تاسیسات و تهویه مطبوع ساختمانی، صنعتی، بیمارستانی، نظامی و ... است.



InstrumentationTools.com



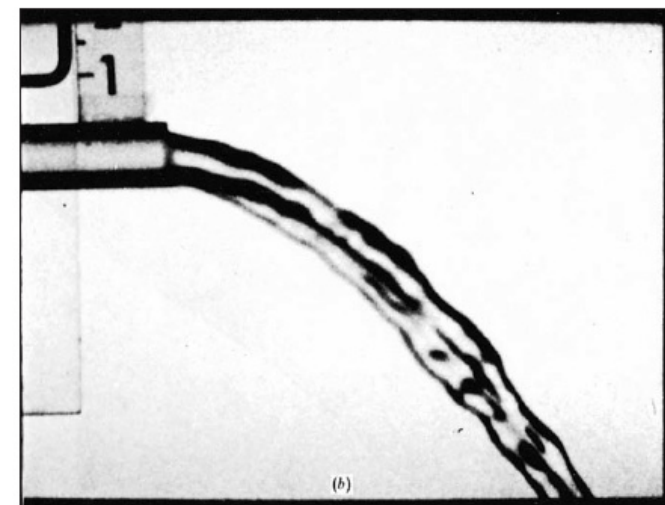
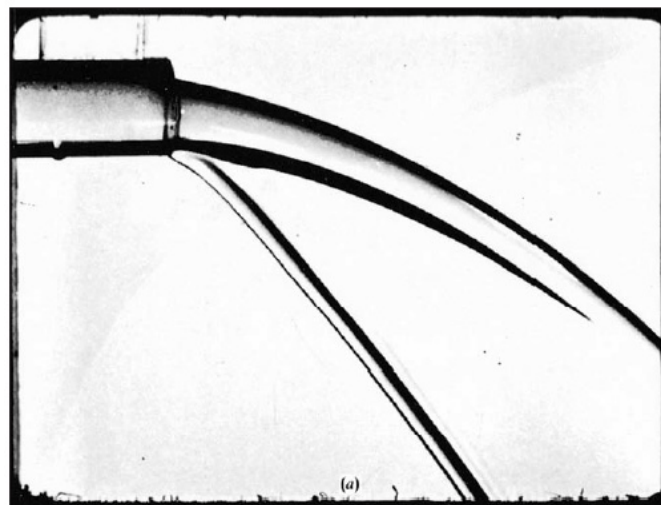
معیار آشفته‌گی جریانهای داخلی

در جریانهای داخل لوله های دارای مقطع مدور، عدد رینولدز بر اساس متوسط سرعت جریان (U) و قطر لوله (d) محاسبه می شود:

$$Re_d = \frac{\rho U d}{\mu} \quad (1)$$

مشاهدات آزمایشگاهی نشان می دهد که در عمده کاربردها، جریان به ازای عدد رینولدز کمتر از ۲۳۰۰ آرام و ضریب اصطکاک آن تنها تابعی از عدد رینولدز است. به ازای اعداد رینولدز بالاتر، جریان آشفته شده و ضریب اصطکاک نه تنها تابعی از عدد رینولدز بلکه تابعی از زبری سطح لوله نیز هست.

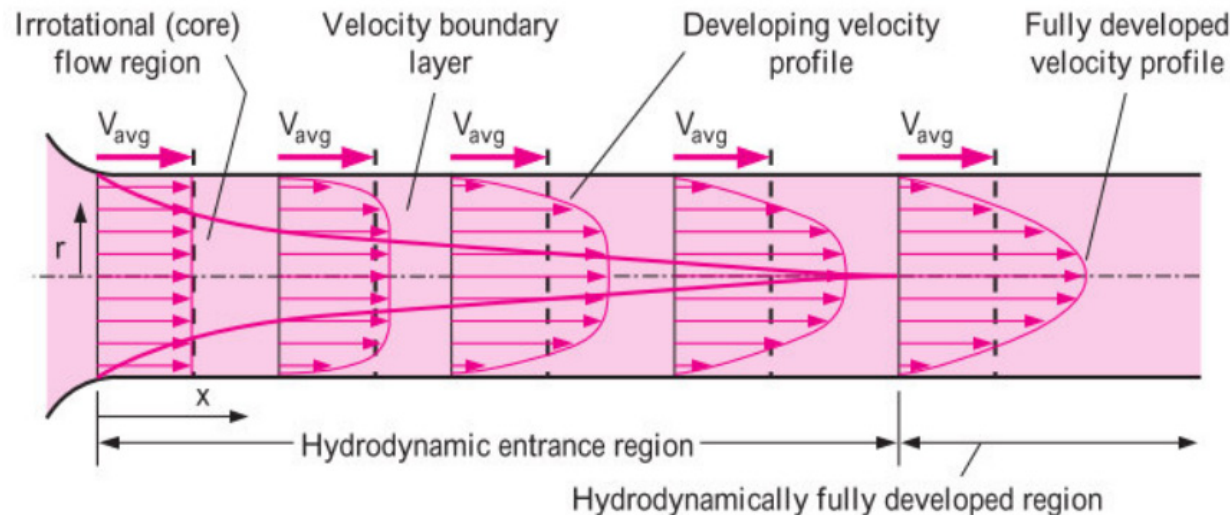
Fig. 6.2 Flow issuing at constant speed from a pipe: (a) high-viscosity, low-Reynolds-number, laminar flow; (b) low-viscosity, high-Reynolds-number, turbulent flow. (National Committee for Fluid Mechanics Films, Education Development Center, Inc., ©1972.)



جریان در حال توسعه (Developing Flow)

در ناحیه ورودی جریانهای داخلی، لایه مرزی جریان بر روی دیواره ها در حال رشد است و لذا ناحیه نزدیک دیواره، داخل لایه مرزی و ناحیه مجاور مرکز لوله (هسته جریان)، در خارج لایه مرزی واقع شده است. بایستی توجه داشت که داخل لایه مرزی، سرعت کمتر از خارج آن است و لذا با رشد لایه مرزی، ناحیه کم سرعت در حال بزرگ شدن است. مطابق قانون بقای جرم دبی جریان ثابت است و لذا مطابق این قانون، بایستی که با رشد لایه مرزی، مقدار سرعت ناحیه خارج لایه مرزی افزایش یابد. به این ترتیب می توان نتیجه گرفت که در ناحیه در حال توسعه، گرادیان سرعت و در نتیجه گرادیان تنش نسبت به جهت پیشروی جریان وجود دارد. بنابراین در این ناحیه جریان دارای اینرسی است (ترمهای انتقال در معادله ناویر-استوکس صفر نیستند). همچنین در این ناحیه گرادیان فشار منفی و متغیر است (مقدار قدر مطلق آن با پیشروی جریان کاهش می یابد).

In Developing Flow: $\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial x} \neq 0$ & $\frac{dp}{dx}$ is not constant



جریان توسعه یافته (Fully Developed Flow):

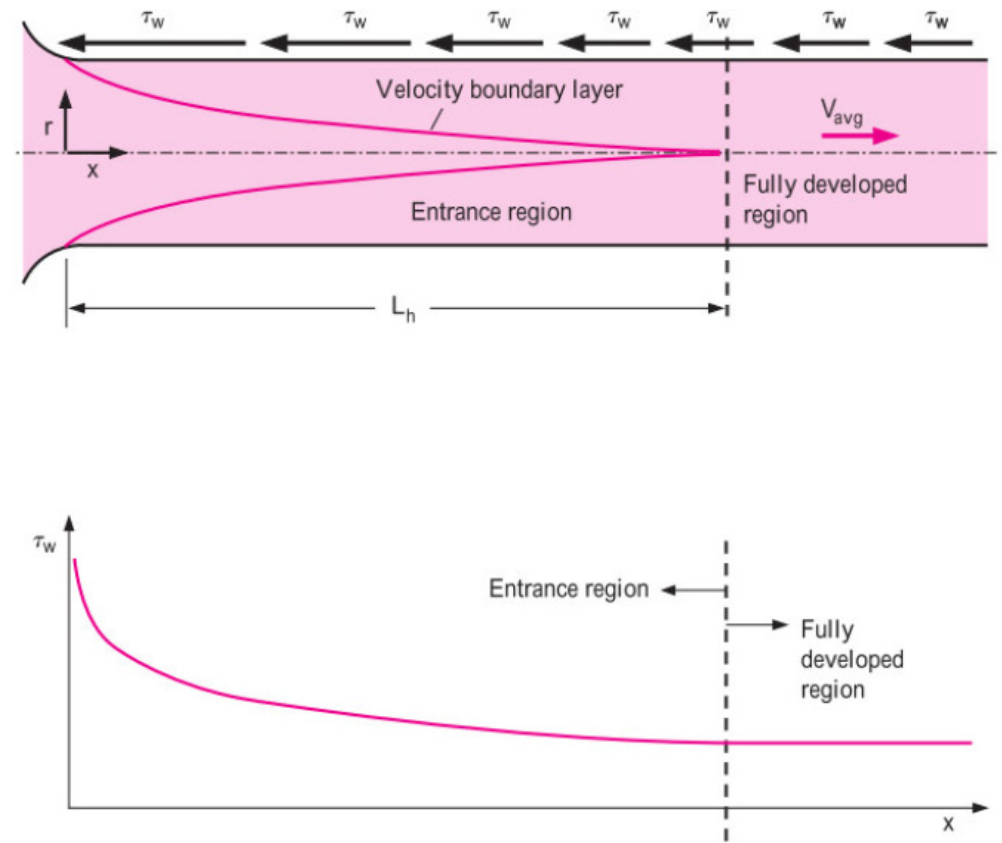
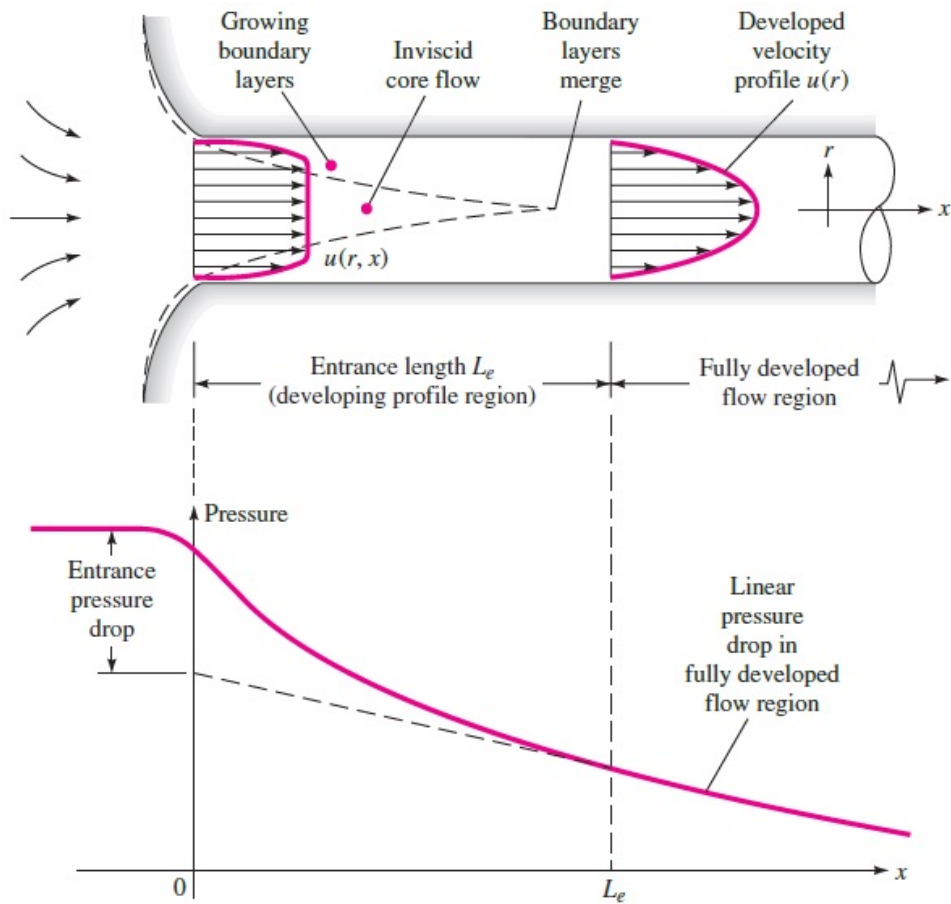
بایستی توجه داشت که جریان در حال توسعه دارای اینرسی (شتاب مادی) است، اما اینرسی آن از نوع کاهنده است. با به هم رسیدن لایه مرزی دیواره ها به یکدیگر، کل میدان جریان داخل لایه مرزی قرار خواهد گرفت و در این حالت گرادیان فشار با تنش برشی دیواره ها به تعادل می رسد. به دلیل تعادل نیروها، اینرسی جریان در این حالت صفر است. در این وضعیت گفته می شود که جریان کاملاً توسعه یافته شده است. در جریان توسعه یافته گرادیان سرعت و تنش صفر است و گرادیان فشار ثابت و منفی است.

In Fully Developed Flow: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ & $\frac{dp}{dx}$ is a negative constant

در این جریان انرژی لازم برای پیشروی صرفاً از طریق کاهش فشار تامین می شود. در عمده کاربردهای مهندسی مربوط به سیستمهای لوله کشی، به دلیل محدود بودن طول ناحیه در حال توسعه، بیشتر طول مسیر جریان عملاً در ناحیه توسعه یافته واقع شده است. همچنین برای طول ناحیه در حال توسعه روابط زیر پیشنهاد شده است:

$$\text{For Laminar Flow: } \frac{L_e}{d} = 0.06 Re_d \quad (2)$$

$$\text{For Turbulent Flow: } \frac{L_e}{d} = 1.6 Re_d^{1/4}, \quad Re_d \leq 10^7 \quad (3)$$



افت هد در لوله ها و ضریب اصطکاک داری

مشاهدات تجربی هاگن نشان داد که افت هد اصطکاکی در لوله های مستقیم به ازای اعداد رینولدز به اندازه کافی بزرگ تقریباً تابعی درجه دوم از سرعت متوسط است:

$$h_{loss} \propto U^2 \quad (4)$$

بدیهی است که با افزایش طول لوله و کاهش قطر آن، مقدار افت هد اصطکاکی زیاد می شود. داری و ویتزباخ تلاشهایی برای تبدیل مشاهده هاگن به یک فرمول مناسب برای محاسبه افت هد اصطکاکی لوله ها انجام دادند که رابطه زیر حاصل این تلاشها است:

$$h_{loss} = f \frac{L}{d} \frac{U^2}{2g} \quad (5)$$

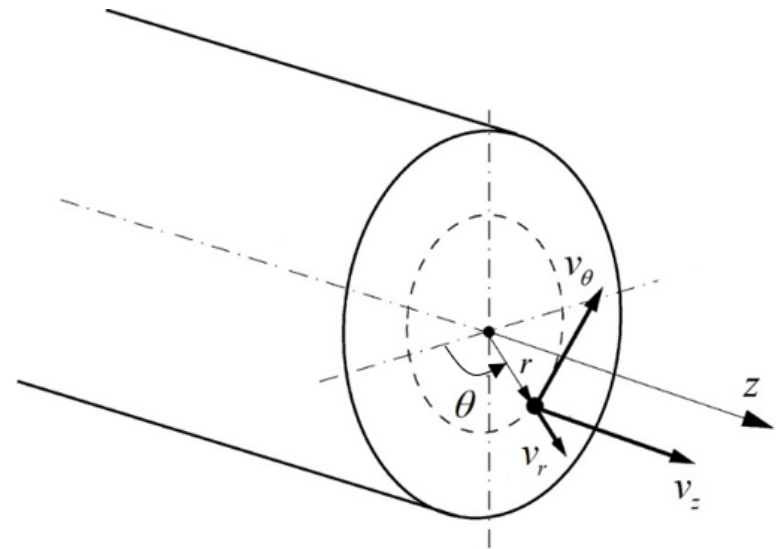
در رابطه (5)، $U^2 / 2g$ دارای دیمانسیون طول و از جنس هد است (پس ترکیب سایر ترمها باید بی بعد باشد). با ضرب کردن نسبت L/d که بی بعد است، اثر طول و قطر لوله به محاسبه هد اصطکاکی وارد می شود و ضریب بی بعد f که تصحیح کننده رابطه برای تبدیل از تناسب به تساوی است، در برگیرنده سایر اثرات مانند تصحیح مشاهده هاگن برای اعداد رینولدز پایینتر و نیز اعمال اثر زبری سطح لوله (جنس لوله) در محاسبات است. ضریب f ضریب اصطکاک داری نامیده می شود و تابعی از عدد رینولدز، زبری سطح (ε) و شکل مقطع لوله است:

$$f = f(Re_d, \varepsilon / d, \text{duct shape}) \quad (6)$$

آنالیز جریان آرام در لوله مستقیم

خوشبختانه آنالیز جریان آرام توسعه یافته، دائمی و تراکم ناپذیر در لوله مستقیم به روش تحلیلی امکان پذیر است. بهتر است برای آنالیز این جریان از دستگاه مختصات استوانه ای استفاده نمود زیرا این مساله متقارن محوری است. با شروع از معادلات پیوستگی و مومنوم در جهت z در دستگاه مختصات استوانه ای داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Continuity :} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \\ \text{The } Z - \text{momentum equation :} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (V \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \nabla^2 v_z \end{array} \right. \quad (V)$$



شکل باز این معادلات بصورت زیر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{cases} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن تقارن محوری ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) و توسعه یافتگی ($\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0$) برای معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}} (v_\theta) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}} (v_z) = 0 \quad (9)$$

برای ترمهای باقیمانده معادله پیوستگی نتیجه می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(\theta) \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(z) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(t) \end{cases} \quad (10)$$

در نهایت نتیجه می شود که v_r تابع جهات مختصات نیست و لذا تنها می تواند یک ثابت باشد:

$$\frac{d(rv_r)}{dr} = 0 \rightarrow rv_r = c_1 \rightarrow v_r = \frac{c_1}{r} \quad (11)$$

با توجه به شرایط مرزی، مقدار c_1 و در نتیجه v_r پیدا می شود:

$$\text{at } r = r_o \rightarrow v_r = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{r_o} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow v_r = 0 \text{ at whole of domain} \quad (12)$$

از معادله مومنوم در جهت θ ، می توان نشان داد که مولفه سرعت v_θ نیز صفر است. بنابراین جریان فقط دارای یک مولفه سرعت v_z است که تنها تابعی از r می باشد. از معادله مومنوم در جهت z داریم:

$$\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \cancel{v_\theta} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \cancel{v_z} \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{g_z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right] \quad (13)$$

برای ترمهای باقیمانده معادله مومنوم داریم:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right) \quad (14)$$

با توجه به ثابت بودن مقدار گرادیان فشار در جریان توسعه یافته، با دو بار انتگرال گیری از رابطه (۱۴) داریم:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{2} + c_2 = r \frac{dv_z}{dr} \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r} = \frac{dv_z}{dr} \rightarrow v_z = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \quad (15)$$

شرایط مرزی مربوط به v_z به شرح زیر هستند:

$$\begin{cases} \text{at } r = r_o \rightarrow v_z = 0 \\ \text{at } r = 0 \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = 0 \text{ or } v_z \text{ is limited} \end{cases} \quad (16)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق می توان ثابتهای رابطه (۱۵) را بدست آورد:

$$\begin{cases} \text{at } r = r_o \rightarrow v_z = 0 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{r_o^2}{4} \right) \\ \text{at } r = 0 \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = 0 \text{ or } v_z \text{ is limited} \rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

با قرار دادن ثابتهای بدست آمده از رابطه (۱۷)، در رابطه (۱۵) داریم:

$$v_z = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{r_o^2}{4} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right\} \quad (18)$$

ماکزیمم سرعت این جریان در مرکز لوله است ($r=0$)، لذا برای مقدار سرعت ماکزیمم داریم:

$$v_{z,\max} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{r_o^2}{4} \right) \quad (19)$$

از رابطه (۱۹)، پروفیل سرعت جریان (رابطه (۱۸)) به شکل زیر قابل بیان است:

$$v_z = v_{z,\max} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right\} \quad (20)$$

برای متوسط سرعت این جریان داریم:

$$U = \int_A v_z dA = \int_0^{r_o} v_{z,\max} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right\} 2\pi r dr = \frac{v_{z,\max}}{2} \quad (21)$$

لذا پروفیل سرعت جریان (فرمول (۲۰))، بر حسب سرعت متوسط جریان به شکل زیر قابل بیان است:

$$\boxed{\frac{v_z}{U} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right\} \text{ or } v_z^* = 2(1 - r^{*2})} \quad (22)$$

ضمناً از روابط (۱۹) و (۲۱) برای متوسط سرعت این جریان داریم:

$$U = -\frac{r_o^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (23)$$

بر اساس حل دقیق بدست آمده، سایر پارامترهای این جریان نیز قابل استخراج هستند. برای تنش برشی دیواره این جریان داریم:

$$\tau_w = \mu \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)_{at r=r_o} = \frac{4\mu U r}{r_o^2} \Big|_{at r=r_o} \rightarrow \boxed{\tau_w = \frac{4\mu U}{r_o}} \quad (24)$$

از رابطه (24) رابطه زیر برای ضریب اصطکاک پوسته ای جریان بدست می آید:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\frac{4\mu U}{r_o}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{8}{\frac{\rho U r_o}{\mu}} = \frac{16}{\frac{\rho U d}{\mu}} \rightarrow \boxed{C_f = \frac{16}{Re_d}} \quad (25)$$

بایستی توجه داشت که در جریان توسعه یافته، گرایدان فشار جریان **ثابت** و منفی است بنابراین برای اختلاف فشار طول L متر از لوله داریم: $\Delta p / L = dp / dz$. بر این اساس و با توجه رابطه (5) برای ضریب اصطکاک دارسی نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} h_{loss} &= f \frac{L U^2}{d 2g} \rightarrow -\frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L U^2}{d 2g} \rightarrow -\frac{\Delta p}{L} \frac{1}{\rho} = f \frac{1}{d} \frac{U^2}{2} \\ \rightarrow -\frac{dp}{dz} \frac{1}{\rho} &= f \frac{1}{d} \frac{U^2}{2} \xrightarrow{\text{From Eq. (23)}} \frac{8\mu U}{\rho r_o^2} = f \frac{1}{d} \frac{U^2}{2} \\ \rightarrow \frac{32\mu}{\rho d^2} &= f \frac{1}{d} \frac{U}{2} \rightarrow f = \frac{64}{\frac{\rho U d}{\mu}} \rightarrow \boxed{f = \frac{64}{Re_d} \quad \& \quad f = 4C_f} \end{aligned} \quad (26)$$

آنالیز جریان آشفته در لوله مستقيم

همانطور که گفته شد جريان در لوله ها به ازاي اعداد رينولدز بيشتر از ۲۳۰۰ دچار آشفتگي مي شود. اين عدد براي رينولدز بحراني مقداري نسبتا کوچک است و عمدتا در کاربردهاي مهندسي، جريان در لوله هاي انتقال آب و کانالهاي تهويه هوا آشفته است. همانطور که پيشتر در بحث لايه مرزي گفته شد، در اينجا نيز لايه مرزي آشفته به چهار ناحيه بر حسب y^+ تقسيم مي شود ($y^+ = \rho u^* y / \mu$ ، $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ و $u^+ = u / u^*$):

۱- ناحيه زير لايه لزج که در آن جريان آرام است ($y^+ < 5$): $u^+ = y^+$



۲- ناحيه مياني يا ناحيه ترکيبي ($5 < y^+ < 60$)

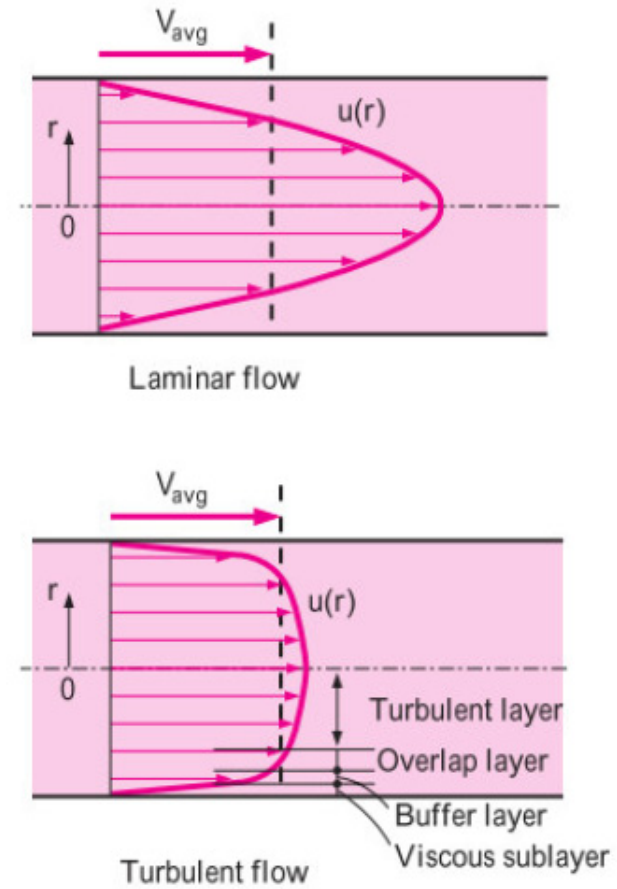
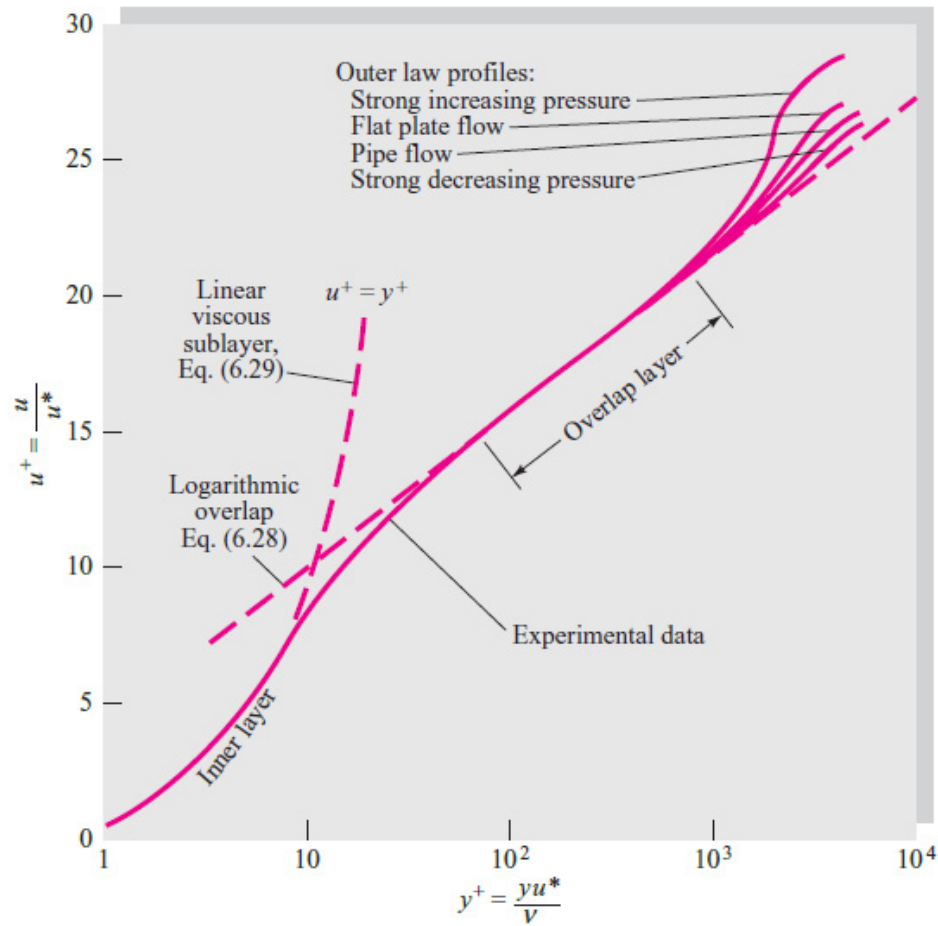
۳- ناحيه قانون لگاريتمي که ناحيه Overlap نيز ناميده مي شود ($60 < y^+ < 800$): $u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B$

۴- ناحيه لايه خارجي که در آن پروفيل سرعت از قانون لگاريتمي تبعيت نمي کند ($y^+ > 800$)

مشاهدات تجربي نشان مي دهد که در اين جريان پروفيل سرعت از قاعده تواني تبعيت مي کند:

$$u / U = (1 - r / r_o)^n \quad (27)$$

در بسياري از کاربردهاي مهندسي (در نزديكي رينولدز 10^5) مقدار توان n برابر $1/7$ است. همانطور که پيشتر گفته شد، پروفيل سرعت جريان آشفته در ناحيه مرکز لوله انحنای کمتری نسبت به جريان آرام دارد در حالیکه تغييرات آن در نزديكي ديواره بسيار شديدتر از جريان آرام است که اين امر سبب بالا بودن تنش برشي ديواره در جريان آشفته نسبت به جريان آرام شده است.



مقایسه پروفیل سرعت جریان آرام و آشفتہ در لوله مستقیم

نواحی مختلف لایه مرزی جریان آشفتہ

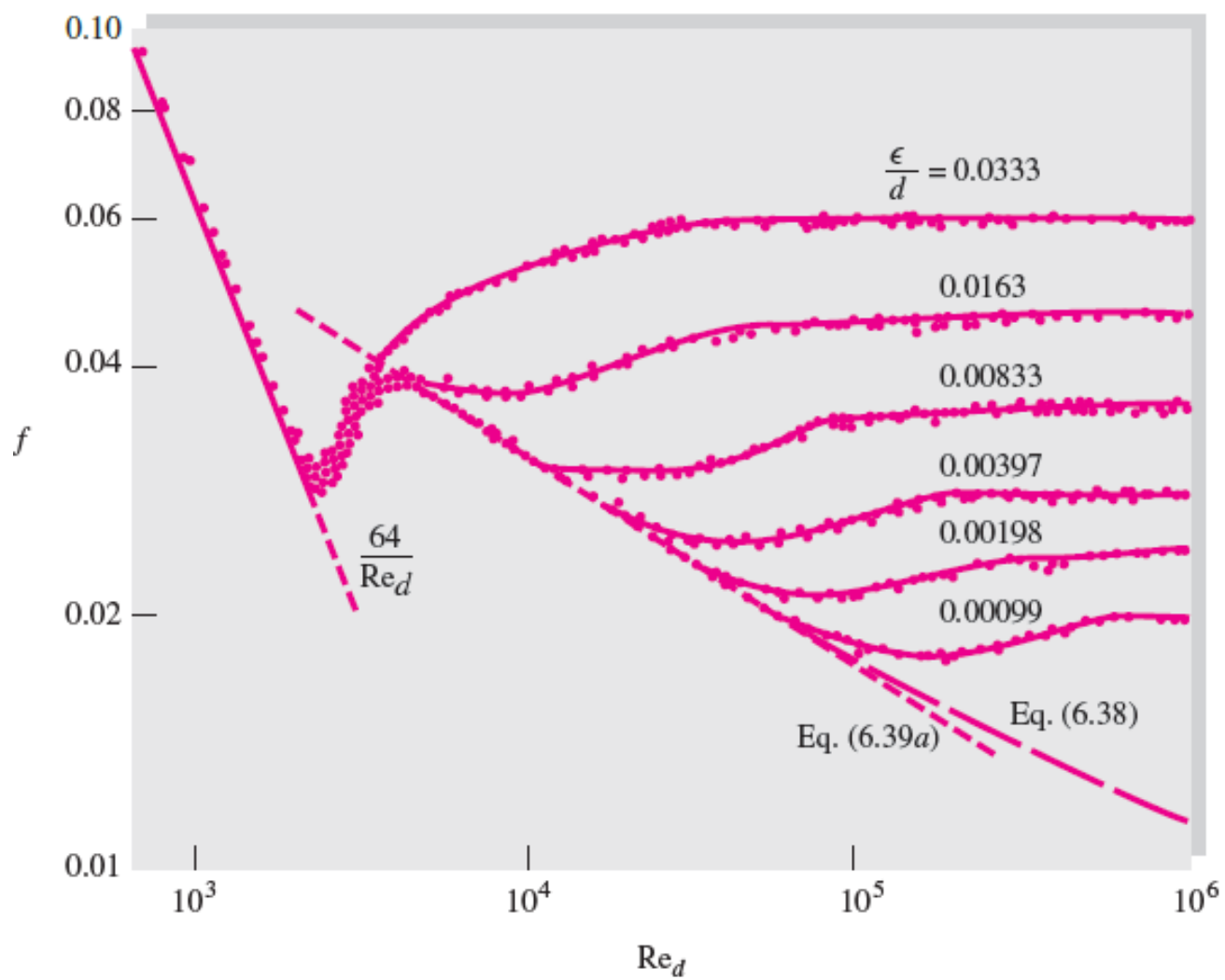
همانطور که پیشتر در بخش لایه مرزی گفته شد، زبری سطوح نقش مهمی در درگ جریانهای آشفته دارد. در جریانهای داخلی نیز برای مشخص کردن اندازه زبری از زبری معادل نیکوراتزه (ε) استفاده می شود. عدد رینولدز زبری بصورت $y_s^+ = \rho u^* \varepsilon / \mu$ تعریف می شود و معیاری برای تعیین صافی/زبری است:

- برای $y_s^+ < 5$ ، سطح صاف است.
- برای $5 < y_s^+ < 70$ ، سطح نیمه زبر است.
- برای $y_s^+ > 70$ ، سطح کاملاً زبر است.

در خصوص ضریب اصطکاک داریسی (f) در جریان آشفته مطالعات متعددی صورت گرفته است. مثلاً روابط زیر برای لوله های دارای سطح صاف پیشنهاد شده است:

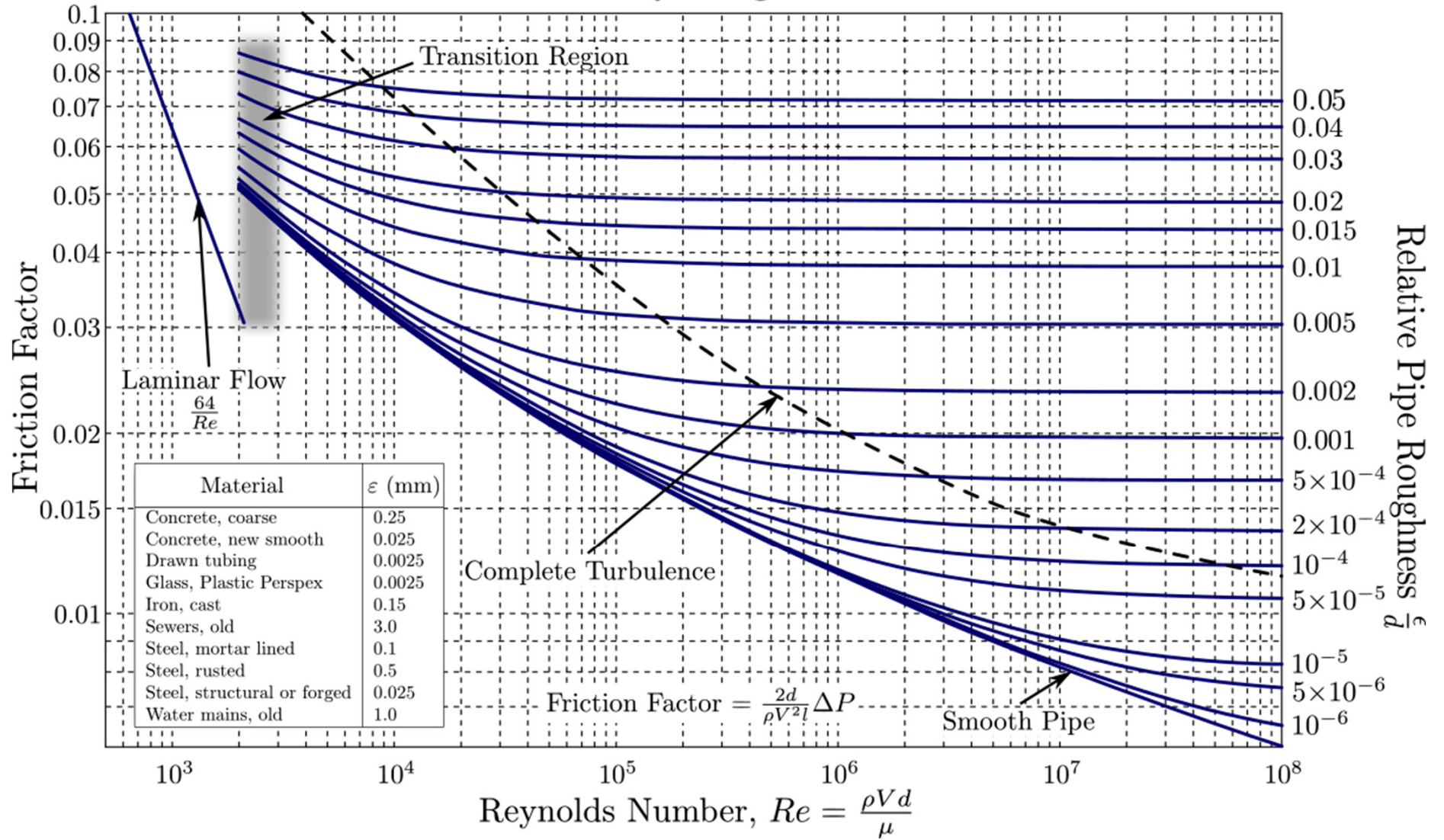
$$f = \begin{cases} 0.316 \text{Re}_d^{-1/4} & 4000 < \text{Re}_d < 10^5 \quad \text{H. Blasius (1911)} \\ \left(1.8 \log \frac{\text{Re}_d}{6.9}\right)^{-2} & \text{Ref. 9} \end{cases} \quad (28)$$

معمولاً از دیاگرام مودی (Moody Diagram) برای استخراج ضریب اصطکاک داریسی (f) استفاده می شود. مطابق این دیاگرام، در جریان آشفته و به ازای مقادیر متوسط عدد رینولدز، f تابعی از عدد رینولدز و زبری سطح (ε) است. همانطور که انتظار می رود با افزایش زبری، f نیز افزایش می یابد. به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ عدد رینولدز، f مستقل از رینولدز بوده و تنها تابعی از زبری است. چنین ناحیه ای، ناحیه کاملاً زبر (Fully Rough Zone) و جریان آن، جریان کاملاً آشفته (Complete Turbulence) نامیده می شود.



دیاگرام مودی

Moody Diagram



**THE
END**